Argumentação e prova em matemática: análise de um estudo realizado com alunos cegos

Argumentation and proof in mathematics: analysis of a study conducted with blind students

Mauricio Alfredo Ayala de Carvalho[1]
Claudia Coelho de Segadas-Vianna[2]

RESUMO

Este artigo apresenta parte de uma pesquisa de mestrado (AYALA, 2016) com o objetivo de analisar as respostas dadas por alunos cegos em problemas matemáticos que normalmente evocam referências visuais. Os sujeitos desta pesquisa são quatro alunos cegos cursando os anos finais do ensino fundamental. Realizada no Instituto Benjamin Constant, a pesquisa recorre a entrevistas semiestruturadas para a coleta de dados, nas quais foram trabalhados problemas matemáticos que normalmente remetem ao âmbito visual. Os estudos de Harel e Sowder (1998, 2007), com suas pesquisas acerca de argumentação e prova, bem como de Vygotski (1993), com seus estudos acerca da psicologia do cego, foram primordiais como embasamento teórico, embora muitos outros também tenham contribuído. Os resultados sugerem que os cegos fazem uso dos esquemas de argumentação concretos, sendo a percepção tátil a característica prevalente.
Palavras-chave: Ensino de matemática. Argumentação e prova. Deficiência visual.

ABSTRACT

This paper presents part of a masters degree research (AYALA, 2016) and its purpose is to analyze answers given by blind students in mathematical problems that normally evoke visual reference. The subjects of this research are four blind students in the final years of elementary school. Being held in Benjamin Constant Institute, the research uses semi-structured interviews, where problems that normally refer to a visual scope were discussed. The studies of Harel & Sowder (1998, 2007), with their research about argumentation and proof, as well as Vygotsky (1993), with his studies about the blind child psychology, were primordial as theoretical foundation, but many other authors contributed. The results indicate that the blind make use of concrete argument schemes, being the haptic perception the prevalent characteristic.
Keywords: Mathematics education. Argumentation and proof. Visual impairment.

1 Mestre em Ensino de Matemática pela UFRJ. E-mail: mauricio.aac@outlook.com.

2 Doutora em Educação Matemática, professora do Instituto de Matemática da UFRJ e coordenadora do Projeto Fundão – Setor Matemática. E-mail: claudia@im.ufrj.br

1. Introdução

Mais do que desenvolver o conhecimento matemático para a própria matemática, a habilidade de provar e argumentar é essencial para a formação de um cidadão crítico, capaz de raciocinar, analisar e demonstrar. Examinando um amplo estudo de estratégias de prova realizado por Harel e Sowder (1998), nota-se que grande parte das argumentações recorreu à percepção visual de algum aspecto do problema, o que se comprova em pesquisas revisadas por esses estudiosos posteriormente (HAREL; SOWDER, 2007). Nesse último trabalho, concluem, a partir de trabalhos científicos realizados ao redor do mundo com alunos de ensino médio e de cursos superiores de matemática e engenharia, que poucos argumentam de forma lógico-dedutiva em provas e muitos usam desenhos como base para sua argumentação.

Considerando que as referências visuais exercem grande influência na argumentação dos alunos, é pertinente analisar as estratégias desenvolvidas por alunos com deficiência visual e as consequências da retirada do fator visual na formação de tais estratégias. Esta pesquisa pretende, assim, responder às seguintes questões: como os cegos argumentam frente a problemas que envolvem referenciais visuais e como são concebidos e utilizados os conceitos geométricos abordados?

Os principais referenciais acerca de argumentação e prova utilizados são os trabalhos de Harel e Sowder (1998, 2007), que criam uma taxonomia para classificar cada resposta apresentada como justificação para uma proposição, categorizando-a nos chamados "esquemas de prova". Assim, com o objetivo de melhor entender como o aprendizado é afetado pela perda da visão e quais estratégias são empregadas pelo cego, adotou-se o clássico referencial da "Defectologia", do psicólogo russo Lev Semenovitch Vygotski, desenvolvido na primeira metade do século XX, em estudos de crianças que apresentavam algum tipo de deficiência. Os trabalhos de Defectologia foram compilados nos anos 1990, sendo aqui utilizados os fundamentos da Defectologia (VYGOTSKI, 1993).

Nesse contexto, espera-se que, por meio desta pesquisa, o melhor entendimento da maneira de argumentar de um cego venha a contribuir para uma reflexão e um planejamento mais eficazes do ensino, potencializando, assim, o desenvolvimento de suas habilidades e contribuindo para uma educação inclusiva.

Este artigo visa analisar justificativas dadas por alunos cegos em suas respostas a problemas matemáticos que usualmente evocam referencial visual, apresentando uma síntese de quatro dos seis problemas matemáticos abordados na pesquisa completa (AYALA, 2016). Na seção seguinte, apresenta-se um breve resumo do desenvolvimento do cego segundo os referenciais teóricos adotados, seguindo-se, então, para o referencial teórico principal acerca de argumentação e prova, em que se aborda a taxonomia de Harel e Sowder (1998), utilizada na pesquisa para classificar as respostas dadas pelos alunos. Logo em seguida, aborda-se a metodologia empregada na pesquisa e, então, os problemas matemáticos em si. O primeiro deles trata das concepções de ponto e reta; o segundo, das concepções de quadrado, losango e retângulo; o terceiro aborda as representações de frações; e o quarto, o reconhecimento de padrão em uma sequência de triângulos. Por fim, abordam-se os resultados obtidos à luz dos referenciais adotados, trazendo-se as consequentes reflexões.

2. O desenvolvimento do cego segundo Vygotski

Vygotski realizou pesquisas acerca do aprendizado de crianças com deficiências, publicando trabalhos a respeito do tema entre 1924 e 1931, os quais foram compilados em 1993, em uma coletânea de suas obras. O autor defende que o desenvolvimento de uma criança com deficiência é possível por caminhos indiretos, em uma realidade em que a ênfase no desenvolvimento se dá pelo caminho direto, o qual pressupõe uma criança sem deficiências. Isso significa que é possível compensar uma deficiência para desenvolver socialmente a criança, adotando-se caminhos alternativos (VYGOTSKI, 1993).

Segundo Warren (1994), há duas abordagens para o estudo de pessoas cegas: a comparativa e a diferencial. Na abordagem comparativa, são realizados estudos com cegos e videntes, extraindo-se uma média do desempenho. Na abordagem diferencial, o cego é estudado em seu próprio contexto, sem comparação com videntes. Warren defende que a abordagem diferencial é a mais adequada para gerar um conhecimento que possa intervir na educação da criança cega e otimizar seu desenvolvimento.

Segundo a abordagem diferencial, quando um cego alcança determinado nível de desenvolvimento e outro não, isso significa que o não alcance de tal nível não se dá por conta da cegueira, pois outro cego já o alcançou. Como todos os indivíduos, os cegos são multideterminados: "Os aspectos sociais, pessoais, orgânicos, familiares etc. influenciam diretamente em seu desenvolvimento" (NUNES; LOMÔNACO, 2008, p. 123). Assim, embora não seja um conceito da época de Vygotski, a abordagem diferencial é totalmente condizente com seus trabalhos. Vygotski supõe que o aluno cego não é simplesmente um aluno vidente subtraído do elemento visual. Nesse sentido, seu processo de aprendizagem não se dá de forma similar. A estrutura psicológica do cego é diferente e deve ser estudada em seu próprio contexto. O contato com o ambiente externo gera conflitos, os quais, por sua vez, dão espaço para estímulos que podem criar um processo compensatório para o desenvolvimento psicológico, ou seja, o caminho alternativo que a criança cega trilha, uma vez que a cegueira a impede de seguir o mesmo caminho que a criança vidente (VYGOTSKI, 1993).

Para o desenvolvimento da criança cega, Vygotski reconhece o importante papel da fala e, nesta pesquisa, através da interação entre aluno e pesquisador, espera-se melhor entender os elementos do cotidiano do aluno, seus conceitos e os chamados pseudoconceitos, que são importantes para o desenvolvimento de qualquer aluno. Os pseudoconceitos são entendidos como conceitos imaturos sobre um assunto, produzidos, com frequência, como reflexo da "voz matemática" de antigos professores. São como conceitos "ingênuos", que ainda demandam desenvolvimento (VYGOTSKI, 2001).

Segundo Veer e Valsiner (1991), Vygotski não deixa clara a diferença entre um conceito real e um pseudoconceito, mas dá a entender que, enquanto o pseudoconceito abrange apenas informações perceptuais sem definições formadas, seu desenvolvimento em um conceito "real" se dá quando o indivíduo passa a trabalhar com as definições e as propriedades do objeto em questão. A seguir, tem-se um caso que ilustra a ideia de pseudoconceitos:

> Como exemplo, Vygotski[3] menciona que uma criança pode associar todos os triângulos disponíveis a um dado triângulo amarelo. Esse comportamento poderia ter sido baseado em um real entendimento do conceito geométrico de "triângulo", mas muitas vezes não é: a criança, na verdade, se baseou em algumas características perceptuais bem concretas (VYGOTSKI apud VEER; VALSINER, 1991, tradução nossa).

Assim, o uso de palavras que remetem a um mesmo conjunto de objetos possibilita a comunicação entre a criança e o adulto, mas o conceito primitivo trazido pela criança, o pseudoconceito, ainda deve evoluir até coincidir com o conceito empregado pelo adulto. Espera-se que, com o melhor conhecimento dos pseudoconceitos dos alunos, seja possível pensar em estratégias de ensino mais eficazes para o melhor desenvolvimento de conceitos.

3. Esquemas de prova segundo Harel e Sowder

As concepções adotadas para esta pesquisa têm como base o referencial de Harel e Sowder (1998, 2007), sendo, contudo, uma visão mais abrangente, ou seja, não estritamente matemática. No artigo de 2007, os autores definem "prova" como aquilo que estabelece a veracidade de uma afirmação para um indivíduo ou comunidade; "argumentação" ou "justificação", por sua vez, é o processo de prova em que o indivíduo se dedica a remover as dúvidas acerca de uma afirmação, dividida em dois subprocessos: averiguação e persuasão. "Averiguação" é o processo segundo o qual o indivíduo se dedica a remover suas próprias dúvidas acerca de uma afirmação; "persuasão", a seu turno, é o processo em que um indivíduo se dedica a remover as dúvidas de outro indivíduo ou comunidade. "Esquema de prova" é o que se constitui como processo de averiguação e persuasão para um indivíduo ou comunidade, estando relacionado ao tipo de rigor necessário para se aceitar uma verdade.

Entender a argumentação do aluno implica entender como ocorrem a averiguação e a persuasão para ele, ou seja, qual esquema de prova é seguido. Existem

3 VYGOTSKI, L. S. *Pedologija Podrostka*. Moscou e Leningrado: Gosudarstvennoe Uchebno-Pedagogichesko Izdatel'stvo, v. 111, 1931, p. 256-257.

diversas taxonomias que classificam os possíveis esquemas de prova em que um aluno pode enquadrar-se. Aqui, aborda-se a taxonomia de Harel e Sowder (1998).

A partir de uma pesquisa realizada com alunos do ensino superior de matemática, Harel e Sowder classificam os esquemas de provas em três grandes categorias: esquemas de provas baseados em convicções externas, esquemas de provas empíricos e esquemas analíticos de prova, cada um subdividido em determinados casos.

Os **esquemas de prova por convicção** são divididos nas categorias *ritual*, *autoridade* e *simbolismo*. A categoria *ritual* descreve os esquemas de prova em que a convicção da validade do argumento se dá através da aparência do argumento, em que o aluno, por exemplo, acredita que a prova está certa porque tem aparência de uma prova, sem avaliar o raciocínio. A categoria de autoridade descreve os esquemas através dos quais o aluno se convence da validade de um argumento pela autoridade de quem argumentou, como, por exemplo, quando acredita que uma afirmação é verdadeira simplesmente "porque o professor falou" ou "porque está escrito em tal livro". A categoria de simbolismo descreve os esquemas de prova em que se procede à demonstração por meio da aplicação de manipulações algébricas sem que haja uma reflexão acerca do significado do que se está fazendo. Um exemplo para ilustrar essa categoria é inferir, a partir de "$2x = 3x$", que "$2 = 3$", por manipular a expressão "cortando" x de ambos os lados sem uma reflexão do que significa "cortar".

Os **esquemas empíricos de prova** são divididos entre *indutivos* e *perceptuais*. Os esquemas de provas aqui denominados indutivos não se referem à indução matemática, mas aos discursos de prova em que o convencimento da validade do argumento se dá através da exposição de um número satisfatório de exemplos, sem haver uma generalização. A pesquisa (HAREL; SOWDER, 1998) relata que, para mostrar aos alunos que os esquemas indutivos de prova não funcionam sempre, os instrutores davam exemplos de proposições matemáticas que eram verdadeiras em alguns casos, mas não em todos. Apesar de os alunos aparentarem entender as limitações dos esquemas indutivos, comportavam-se de modo contrário, por vezes usando-os até mesmo com apenas um exemplo e encarando os contraexemplos apenas como exceção. Outro problema identificado foi o fato de não entenderem a impossibilidade de usar exemplos para provar, mas de poderem usar um contraexemplo para refutar determinada afirmação. Os esquemas de prova por percepção envolvem, como o nome diz, o convencimento de ser verdade pela percepção, envolvendo imagens, mas sem a habilidade de realizar transformações, como, por exemplo, “É óbvio que é um quadrado! Não está vendo que os quatro lados são iguais?”.

Os **esquemas analíticos de prova**, que envolvem dedução lógica, são divididos entre *transformacionais* e *axiomáticos*. Os esquemas transformacionais envolvem operações sobre imagens, abrangendo dois níveis de profundidade cognitiva: internalizada, em que o aluno segue o caminho tradicional que já conhece, e interiorizada, em que o aluno reflete sobre o problema ao realizar transformações. Por definição, o processo de interiorização não pode ocorrer sem antes haver um processo de internalização.

Por fim, nos esquemas de prova axiomáticos, o aluno está ciente de que o resultado deve ser desenvolvido de forma lógico-dedutiva a partir de objetos já definidos e axiomas-base. Um esquema axiomático é dito intuitivo quando o aluno só consegue lidar com axiomas que correspondem à sua intuição, como, por exemplo, “para quaisquer a e b números reais, tem-se que $a + b = b + a$”, pois é uma propriedade que parece óbvia e intuitiva. Pode também ser estrutural, quando o aluno reconhece que há um conjunto axiomático que define uma estrutura, mas trabalha sobre a estrutura apenas, como, por exemplo, quando estuda geometria euclidiana reconhecendo a presença de seus axiomas, mas sem necessariamente refletir sobre as implicações de cada um em particular. Harel e Sowder (1998) especulam que um esquema de prova estrutural é a base para o chamado *esquema axiomatizante*, em que o aluno é capaz de investigar as implicações que uma variação nos axiomas gera.

4. Metodologia

Trata-se de uma pesquisa de natureza qualitativa, baseada em entrevistas semiestruturadas com alunos cegos do ensino fundamental do Instituto Benjamin Constant (IBC), instituição voltada a pessoas com deficiência visual, de destaque no campo da educação especializada.

Inicialmente, em 2015, foi realizado um estudo-piloto com três alunos do nono ano, mas a entrevista com um deles não foi considerada para esse trabalho, tendo em vista que apresentava uma aprendizagem bastante comprometida, não sabendo responder a nenhuma pergunta e não demonstrando nenhum interesse. Em 2016, foi realizado o estudo principal com alunos do oitavo ano, já com maior planejamento e cuidado. O objetivo foi testar a aplicação da sequência didática e ver quais seriam os principais problemas enfrentados pelo pesquisador para que um novo estudo fosse realizado, descartando-se o piloto. Entretanto, como a dupla de alunos do estudo principal apresentou resultados não tão satisfatórios quanto os alunos do piloto, pelo fato de não estarem familiarizados com o conteúdo matemático abordado, optou-se, então, por incluir o estudo-piloto na análise e em posterior relato da pesquisa. Assim, desde o estudo-piloto, as entrevistas ocorreram com gravação de áudio. Já no estudo principal, houve também a gravação de um vídeo para melhor descrever as posturas e os gestos. Os alunos do estudo-piloto foram chamados de Aluna A e Aluno B, enquanto os do estudo principal foram chamados de Aluno D e Aluna E. A Aluna A tinha 16 anos quando foi entrevistada e o Aluno B tinha 14, ambos cursando o nono ano na época. O Aluno D e a Aluna E tinham ambos 16 anos e cursavam o oitavo ano quando entrevistados. As entrevistas foram individuais.

Nesta pesquisa, aplicou-se também o chamado "método da dupla estimulação", criado por Vygotski, em contraposição aos métodos de seus contemporâneos. De acordo com esse método, o papel do investigador não consiste em meramente traçar um "perfil diagnóstico" das funções psicológicas, mas promover a transição do estado atual para um estado novo e ainda não existente. Assim se aplica o método: o sujeito é colocado em uma situação estruturada em que há um problema que excede seu conhecimento e capacidade, e recebe uma orientação ativa no sentido de construir um novo meio para solucionar o problema inicial (VEER; VALSINER, 1991; FERNANDES, 2004).

Durante as entrevistas, os alunos foram expostos a problemas de matemática que envolvem, para os videntes, referências visuais, sendo o problema em si o primeiro estímulo recebido pelo aluno e, ao longo do diálogo, novos estímulos foram aplicados por parte do pesquisador. Em cada entrevista foi aplicada uma sequência didática de seis problemas matemáticos, aos quais os alunos deveriam responder, justificando a resposta dada. Os problemas foram pensados de modo a evocar referências visuais por parte dos videntes. Para este artigo, foram selecionados quatro de seis problemas. A seguir, em cada seção, são apresentados: o enunciado do problema apresentado, seus objetivos e as reações dos alunos durante as entrevistas.

5. Concepções acerca de ponto e reta

O enunciado apresentado no primeiro problema foi: Dados dois pontos em uma reta, quantos pontos existem entre eles?

Com esse primeiro problema, buscou-se averiguar como são concebidos ponto e reta no pensamento do aluno, suas representações e a forma pela qual são manipuladas (se manipuladas) pelo aluno. Não havia expectativa, necessariamente, no sentido de respostas corretas do ponto de vista formal ou com rigor, visto que se trata de um problema normalmente trabalhado em um curso de geometria de nível superior. Aqui, os alunos do nono ano apresentaram uma diferença em relação aos do oitavo ano no que concerne à extensão da reta. Os alunos do oitavo ano reconheceram que a reta é algo que se estende infinitamente, enquanto os do nono ano, ao trabalharem com a reta, pensaram em exemplos que são sempre segmentos, limitados.

A Aluna A usou como reta para o problema 1 um lado de uma resma de folhas que estava no local, identificando-o como “reta”, e limitando, como “pontos”, os dois vértices da folha. Para verificar quantos pontos existem entre dados dois pontos da reta, ela contou quantas vezes a representação tomada de “ponto” aparece entre os dois pontos iniciais. Como não há “cantos de folha” entre os vértices do lado da folha, sua resposta foi “não há”, dizendo ainda que não “vê” nenhum ponto ali. Ao aplicar o método da dupla estimulação, o pesquisador obteve êxito em identificar como ela pensava e trabalhava pontos e retas, bem como em desenvolver sua fala, de modo que compreendesse que, entre dois pontos dados, existem infinitos pontos. Um estímulo crucial para isso foi perguntar se, então, a reta estava “furada”. A partir dessa pergunta, ela percebeu que deveria haver vários pontos no interior da reta, pois lhe pareceu absurda a ideia de a reta estar “furada”, mas, a princípio, não sabia dizer quantos.

Desse modo, o pesquisador começou a guiá-la, levando-a a reconhecer que havia pelo menos um ponto entre dados dois pontos e que, entre esse ponto e um dos iniciais, há mais outro (caso contrário, a reta estaria "furada"); a Aluna A logo percebeu que isso pode repetir-se infinitamente, reafirmando o que dissera, ou seja, a existência de "muitos" pontos.

Os Alunos B e D associaram ponto a uma representação concreta: a ponta dos dedos. Para verificar quantos pontos cabiam entre dados dois pontos, eles contaram quantas vezes a ponta de seus dedos coube no espaço ocupado na mesa:

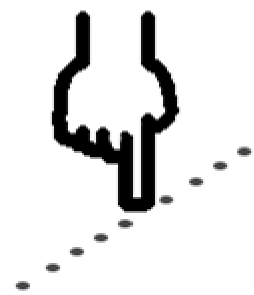

Figura 1: Representação do gesto dos alunos B e D, com o dedo indicador demarcando pontos imaginários na superfície da mesa.

Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

A Aluna E associou ponto a uma gota d'água e a um pingo de chuva quando lhe foi indagado o que pensava quando ouvia a palavra "ponto". Ao partir para o problema, seguiu o raciocínio de verificar quantas vezes o objeto adotado para representar um ponto "cabe" entre os dois pontos dados. Embora não fizesse constantemente referências específicas a representações concretas, ela afirmou que não sabia quantos caberiam ali, pois isso dependeria do tamanho dos pontos e de quão afastados os pontos iniciais estavam entre si. Nesse problema ainda, ela exemplificou "reta" com a palavra "parede", dizendo que uma parede é um plano, mas, se essa parede se estender infinitamente em uma direção, torna-se uma reta. Pela sua fala, é possível entender que, no "infinito", a parede tem a aparência de uma reta. No caso dos Alunos B, D e E, aplicando o método da dupla estimulação, o pesquisador obteve sucesso apenas em identificar como eles concebiam e trabalhavam os objetos geométricos, mas não houve êxito em desenvolver o raciocínio deles de modo a entenderem que, entre dois pontos dados na reta, existem infinitos pontos.

Ainda que envolva conceitos primitivos da geometria euclideana, como ponto e reta, esse problema foi interessante por mostrar quais representações são pensadas e manipuladas pelos cegos. Em síntese, todos os esquemas de prova verificados se enquadram na categoria de esquema empírico-perceptual. A Aluna A verificou empiricamente quantas vezes o ponto "aparecia", enquanto os outros verificaram empiricamente quantas vezes o ponto "cabia".

6. Concepções acerca de quadrado, losango e retângulo

Problema: Dado um quadrado, tomando os pontos médios de cada lado e ligando-os dois a dois, que nova figura é formada? Por quê?

O objetivo desse problema é averiguar a estratégia adotada para justificar a resposta dada, quais conceitos/definições foram empregados nessa estratégia, como os conceitos/definições foram manipulados e como os alunos ligaram os pontos médios. Um geoplano foi oferecido para servir de suporte à formação da figura. O geoplano consiste em uma tábua que representa o plano, com uma grade de pinos representando os pontos. Nessa tábua, é possível desenhar figuras colocando-se elásticos nos pinos:

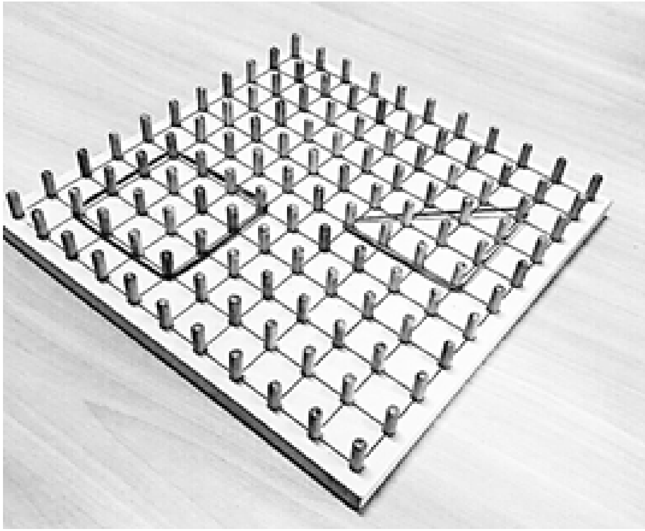

Figura 2: Geoplano utilizado na pesquisa – uma tábua quadrada representando um plano, com diversos pinos de madeiras representando os pontos. Elásticos são utilizados para desenhar as figuras geométricas ao serem fixados nos pinos.

Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

Nesse problema, os alunos A e B incorreram em um erro que é comum entre os alunos videntes: dependendo da posição em que o quadrado lhes é apresentado, deixa de ser um quadrado e passa a ser chamado de losango. É fato estudado que, eventualmente, os alunos tendem a encaixar as figuras em protótipos visuais e se enganar por conta de sua orientação (DE VILLIERS, 2010).

Após ligarem os pontos médios com elástico, conforme ilustra a Figura 3, disseram, então, que se tratava de um losango.

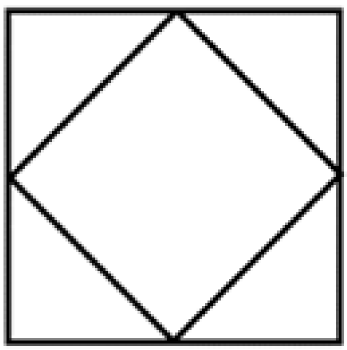

Figura 3: Ilustração da figura formada no geoplano à frente dos alunos A e B – Um quadrado de base horizontal com um quadrado em seu interior, onde cada vértice do quadrado interior está sobre o ponto médio de um lado do quadrado de base horizontal.

Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

Ao ser questionada do porquê de ser um losango, a Aluna A respondeu: "*Porque... apesar de ter quatro lados, tá dessa maneira aqui... Esse ponto fazendo ponto aqui em cima, fazendo assim... e assim*". Ela se referia aos vértices do quadrado formado, que estão em posições distintas das quais estariam se fosse um quadrado, segundo sua concepção. Já o Aluno B respondeu: "*Agora eu não me lembro as características geométricas do losango, mas ele tem o formato de um losango* [referindo-se à figura formada]. *Ele é tipo um quadrado*". Em seguida, o pesquisador girou o geoplano, deixando-o agora na seguinte posição em relação aos alunos A e B, respectivamente:

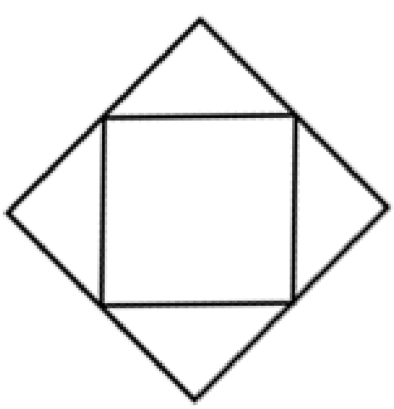

Figura 4: Ilustração da figura formada no geoplano rotacionado à frente dos alunos A e B – Um quadrado de base oblíqua em relação ao eixo horizontal e um quadrado de base horizontal em seu interior, de modo que cada vértice do quadrado interior está sobre o ponto médio de um dos lados do quadrado exterior.

Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

Ambos confirmaram que a figura interior passou a ser um quadrado, e a exterior, um losango. Asseguraram também que, ao se girar uma figura, ela pode passar a ser outra. No caso do Aluno B, enquanto refletia sobre a questão de a figura mudar ao ser girada, ele declarou: "*Dependendo do ponto de vista... É porque tô avaliando esteticamente*", notando-se aqui um pseudoconceito de losango, em que as posições percebidas dos elementos caracterizam o objeto.

Durante a atividade, uma fala do Aluno B para identificar o ponto médio de um lado que abrangia cinco pinos merece ser descrita. Como o pino que fica no meio é o terceiro, ele disse que o ponto médio de um lado que vale 5 fica no 3, da seguinte forma: "*... um quadrado de lado 5 cm. Eu estabeleço o ponto médio dele no centímetro 3*". Esse mal-entendido foi esclarecido para não haver confusão futura. A seguir, ilustra-se a situação:

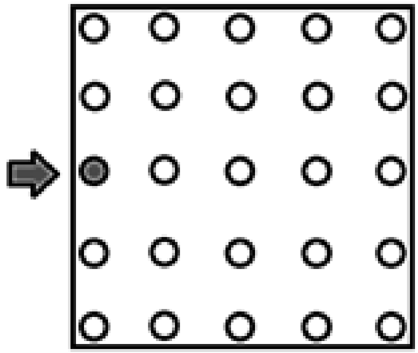

Figura 5: Ilustração do terceiro pino como o ponto médio do lado que abrange cinco pinos.
Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

No caso do Aluno D, ele chegou a mencionar que a figura no exterior se tratava de um losango, mas, ao contrário dos alunos A e B, não compartilhou da ideia de que a figura tivesse outra classificação, dependendo de como fosse apresentada. Após afirmar que se tratava de um losango, ele voltou a tateá-la e mudou de ideia. Disse, então, que era um retângulo e justificou isso pelas características concretas percebidas pelo tato: "*Porque um lado é maior que o outro*". Os lados eram iguais, mas, independentemente da falha de sua percepção, o fato de afirmar ser um retângulo, apontando para suas características concretas, revela seu pseudoconceito de retângulo.

No caso da Aluna E, inicialmente ela afirmou que a figura formada era um quadrado, mas, ao utilizar o geoplano, mudou de ideia e disse que não era um quadrado, pois, ao tatear, não percebeu seus lados, o que a levou a questionar: "*Como é que vai ser um quadrado sem o espaço, aquela linha?*". Após os pontos serem ligados por elásticos pelo pesquisador, ela, então, afirmou que a figura formada no interior era um quadrado, por causa de suas características concretas: "*Porque tem os lados, os pontos... Tá na forma de um quadrado*". Isso mostra seu pseudoconceito acerca de "quadrado", em que percepção da forma e da disposição dos elementos pelo tato é o elemento que define essa figura.

Esse problema é interessante por expor a importância que a percepção tátil tem nas definições, e como uma pequena mudança na percepção, como, por exemplo, no caso de a figura ser girada, pode alterar totalmente a classificação que lhe é atribuída. Em síntese, todas as respostas a esse problema seguiram um esquema de prova empírico-perceptual.

7. Representações de frações

Outro problema abordado com os alunos consistia em qual é a maior fração: 3/4 ou 9/10? Foi-lhes solicitado que resolvessem essa questão sem igualar os denominadores. Ao restringir o método de solução, esperava-se averiguar que tipo de objetos os alunos associam às frações e como isso é usado/manipulado para argumentar e justificar a resposta dada. Os alunos puderam solicitar o uso de qualquer material concreto disponível, como, por exemplo, o soroban (ábaco japonês). Embora não seja um problema de geometria, comparar frações é algo que costuma levar o vidente a pensar em uma representação visual correspondente, sendo, então, interessante investigar a fala dos cegos nesse caso.

A Aluna A disse, inicialmente, que a fração 9/10 é maior que 3/4, pois o numerador 9 é maior que o numerador 3 e o denominador 10 é maior que o denominador 4. Em seguida, o pesquisador perguntou sobre a fração 5/4 em relação a 9/10. Ela, então, respondeu o mesmo, ou seja, que 9/10 é maior que 5/4, mas, em seguida, o pesquisador perguntou sobre o 5 dividido por 4 dar "1 vírgula alguma coisa", enquanto o 9/10 dar "zero vírgula alguma coisa". Nesse momento, a aluna percebeu que algo estava errado e empregou a estratégia do pesquisador para comparar as frações iniciais, recorrendo a um soroban para dividir 3 por 4 e 9 por 10. Percebe-se que, nesse momento, a interferência do pesquisador foi excessiva, visto que, sem perceber, apresentou um método pronto para a solução do problema. Entretanto, após a divisão, ela afirmou que 9/10 é menor, pois dá 0,9, enquanto 3/4 é maior, pois dá 0,75. O não reconhecimento do 0,9 como um valor maior que 0,75 provavelmente se deve ao fato de estar comparando os números 75 e 9, equívoco que acontece também com videntes, que comparam a parte decimal como se estivessem lidando com números inteiros (MONTEIRO; COSTA, 1996). Por fim, a aluna lembrou que 0,75 é um valor entre 0,7 e 0,8, relacionando isso às notas das provas.

O Aluno B, por sua vez, observou que os valores dos numeradores eram bem próximos aos dos denominadores, o que o levou a entender as duas frações como equivalentes, mas, ao ser questionado do porquê, respondeu que são "mais ou menos iguais", afirmando que a fração 9/10 é maior porque, como são pedaços menores, falta menos para chegar ao todo do que em 3/4, que tem pedaços maiores. Ele justificou o fato de faltar mais de 3/4 para o todo da seguinte forma: "*Falta mais porque, se você divide uma coisa em quatro e outra coisa em dez, a que tá dividida em dez vai ficar em fragmentos menores, contanto que sejam do mesmo tamanho*". Não expôs nenhum exemplo concreto, apesar de falar "pedaço", ficando a dúvida de qual representação ele teria imaginado para comparar as frações.

O Aluno D pensou em pizzas e as dividiu, afirmando que 3/4 é uma fração maior que 9/10 porque três pedaços grandes de pizza (3/4) correspondem a uma quantidade maior de pizza que nove pedaços pequenos (9/10). O aluno se apega demais ao fato de os pedaços de 1/4 serem maiores que os de 1/9 e não percebe que, ao todo, há mais pizza em nove pedaços pequenos do mesmo todo que em quatro pedaços grandes. Também não foi possível usar estímulos relacionados aos decimais, pois ele não conseguia, na época em que foi entrevistado, transformar um número representado em forma fracionária para a forma decimal e vice-versa.

A Aluna E respondeu que a fração 9/10 é maior que 3/4 e, quando questionada da razão para essa afirmativa, declarou: "*A outra é só três quartos, tá na cara que é menor*". Assim como a Aluna A inicialmente, ela compara as quantidades expostas isoladamente nos numeradores e denominadores, e não a fração como um todo. O pesquisador tentou usar outros exemplos, como 1/2, perguntando qual o resultado da divisão e indagando sobre exemplos concretos. Ela respondeu imaginar um bolo quando pensa em partir algo, então o pesquisador seguiu usando essa representação, mas ela apresentou dificuldade em efetuar divisões entre números inteiros.

Esse problema mostra que, mesmo sem referenciais visuais, os alunos cegos investigados conseguem trabalhar com frações, pensando, inclusive, em objetos particionados, como nos casos dos alunos B, D e E – uma estratégia visual bastante empregada por videntes (que optam por pensar em objetos inteiros e reparti-los). Como esse problema não envolve uma generalização, não havia como apresentar um caso de esquema analítico, mas, embora todos os discursos formulados pelos alunos tenham abrangido esquemas empíricos perceptuais, mostrou-se interessante na investigação de como os cegos representam frações segundo esse raciocínio perceptual.

8. Reconhecimento de padrão em uma sequência de triângulos

No último problema, o pesquisador formou uma sequência para cada aluno (Fig. 6), mostrando o caso de um triângulo, depois de dois e, em seguida, de três, indagando quantos triângulos e quantos palitos havia em cada caso. Os triângulos foram formados com palitos em cima de um pano, para que os alunos pudessem tatear e identificar os elementos presentes, bem como suas características, por meio do tato. Com esse problema, esperava-se observar as tentativas de generalização e os argumentos subjacentes. Para a Aluna E, começou-se com a figura já com três triângulos, depois com quatro e, por último, com cinco. Todos os alunos foram capazes de perceber que, a cada triângulo, somavam-se dois palitos.

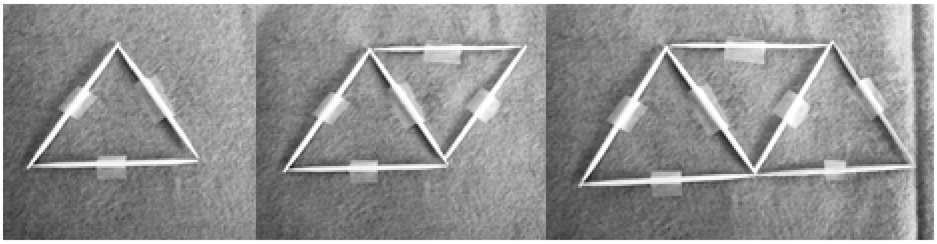

Figura 6: Sequência de triângulos e palitos – em uma flanela, palitos de dente são fixados com fita adesiva de fácil remoção, formando triângulos. São ilustrados três estágios da sequência: 1) um triângulo com três palitos; 2) dois triângulos com cinco palitos; 3) três triângulos com sete palitos.

Fonte: Elaborada pelo primeiro autor.

Tanto a Aluna A como o Aluno B foram questionados sobre quantos palitos seriam necessários para formar dez triângulos. Ambos adotaram a mesma estratégia de contar, em primeiro lugar, quantos seriam necessários para cinco e, então, multiplicar o valor por dois. No caso da Aluna A, contando no modelo formado por ela mesma e, no caso do Aluno B, imaginando a figura, uma vez que não recorreu ao modelo concreto. Após verificarem que eram necessários 11 palitos para formar 5 triângulos, afirmaram que, para dez triângulos, seriam necessários 22 palitos. Com isso, o pesquisador perguntou acerca dos casos de dois e quatro triângulos e, imediatamente, a Aluna A e o Aluno B perceberam que o raciocínio de proporcionalidade não estava correto, mas apenas o Aluno B conseguiu corrigir o erro levando em conta o palito "adicional" do primeiro triângulo. Mesmo com o estímulo do pesquisador, nenhum dos dois conseguiu desenvolver uma generalização.

Os alunos D e E, quando questionados sobre quantidades maiores, pensaram em uma estratégia de ir contando de dois em dois triângulos, como uma forma de seguir mais rápido, mas nem tentaram calcular para quantidades maiores de triângulos. Ambos responderam que somente era possível calcular a quantidade de palitos quando se soma até atingir a quantidade desejada de triângulos. O pesquisador não conseguiu desenvolver uma generalização com esses alunos.

Em síntese, todos os esquemas apresentados no problema 6 foram empíricos indutivos, sendo a contagem por iteração a única forma de solução reconhecida por eles.

9. Resultados

Uma questão inicial da pesquisa consistia em verificar a tendência de um grupo de indivíduos cegos em seus esquemas de prova, visto que não contam com o principal fator que leva os videntes a empregarem esquemas empíricos em contextos que envolvem entes visuais. Constatou-se que, assim como no caso dos videntes, a maioria dos esquemas de prova é empírica, sendo a percepção tátil a referência de maior relevância.

Para entender isso, deve-se ter em mente que o cego tem sua própria "visão" do mundo. Embora essa palavra remeta a informações captadas pelo olho, reflete-se na fala do cego, referenciando o que ele percebe à sua frente. Isso se mostra claro quando a Aluna A diz que não vê nenhum ponto no segmento ou quando o Aluno B diz que está avaliando esteticamente a figura. De acordo com A. V. Birilev, um homem cego com elevada formação educacional, "a forma como uma pessoa cega falha em ver a luz não é a mesma que um vidente vendado" (VYGOTSKI, 1993, p. 102).

De fato, os cegos que integraram esta pesquisa "veem" com o tato. Assim como as informações visuais representaram um fator de peso nas pesquisas ao redor do mundo com videntes (HAREL; SOWDER, 2007), as informações táteis foram um fator determinante no caso dos cegos em suas estratégias de prova, como, por exemplo, ocorreu com o Aluno B, ao ligar os pontos médios dos lados do quadrado com os elásticos para entender como era formada a figura e, só então, refletir sobre a questão em si. Dados desse tipo reforçam a importância que os recursos didáticos têm para o ensino de alunos cegos, ajudando-os a seguir caminhos alternativos no aprendizado para contornar a falta da visão, sendo o tato a "via alternativa" (VYGOTSKI, 1993) mais observada na presente pesquisa.

Outra questão relevante era descobrir como os conceitos abordados eram concebidos e aplicados pelos alunos, identificando os pseudoconceitos, os quais, segundo Vygotski (2001), são cruciais no desenvolvimento dos conceitos. É evidente que, no caso de reta e ponto, não se esperou uma definição formal, visto que, de fato, não existe nenhuma. Mas é interessante verificar como esses objetos são representados e como tais representações são manipuladas. Todos os alunos mostraram-se capazes de associar, de modo flexível, diversos objetos concretos a pontos e retas. No caso dos alunos B e D, a representação marcante para ponto baseou-se na ponta do dedo. No caso da Aluna E, foram o pingo de chuva e a gota d'água. No caso da Aluna A, não se notou exatamente uma preferência, visto que ela improvisou, usando uma resma de folhas que, acidentalmente, estava sobre a mesa no momento da entrevista. Assim, foi a única que, com estímulos do pesquisador, conseguiu atingir um grau de abstração maior que os demais. No caso do quadrado e do triângulo, apenas os alunos A e B apresentaram definições corretas, mas todos trabalharam apenas sobre o concreto de forma estática, o que se evidenciou quando afirmaram que o quadrado rotacionado deixava de ser um quadrado.

Durante a pesquisa, os recursos didáticos se mostraram de grande importância para o desenvolvimento do cego, oferecendo-lhe uma via alternativa, o que condiz com as ideias de Vygotsky (1993) ao refletir sobre a possibilidade de o cego trilhar outros caminhos em seu processo de aprendizado. Observou-se também que, ao mesmo tempo que os recursos visuais são muitas vezes uma base para os pseudoconceitos dos videntes, os recursos táteis também são uma base para pseudoconceitos a serem trabalhados com cegos. Começando com o problema dos pontos na reta, percebe-se que nenhum dos alunos tem uma noção de reta que envolva sua continuidade – eles trabalham com quantidades de pontos que podem ser contados, o que talvez seja reflexo do modo de usar determinados materiais para trabalhar os conceitos de reta e ponto. Em se tratando do geoplano, houve um mal-entendido com o Aluno B, ao se indagar sobre os pontos médios: o material conta com um conjunto de pontos isolados, o que pode gerar confusão ao se trabalhar o conceito de medida. Isso é perceptível quando o aluno considera um lado que abrange cinco pinos como se a medida fosse 5 cm e, ao assumir o terceiro pino, localizado no meio, como o "centímetro 3".

10. Reflexões finais

Em síntese, como constatado nos resultados, os esquemas de prova empíricos surgem na fala dos alunos entrevistados em todos os problemas aqui abordados. Seguindo a taxonomia de Harel e Sowder (1998, 2007), em relação aos problemas dos pontos na reta, dos quadriláteros e das frações, todos seguem um esquema de prova empírico-perceptual. No entanto, no problema da sequência de palitos, já é possível notar um esquema empírico-indutivo.

Ao se constatar certa tendência, por parte dos cegos, de seguir esquemas mais empíricos, estende-se a eles a preocupação já existente em relação aos alunos videntes, ou seja, de como melhor desenvolver habilidades de argumentação com os alunos. Nota-se, também entre os alunos cegos, erros recorrentes de pseudoconceitos que se revelam comuns entre os videntes, como, por exemplo, o caso do quadrado, que, segundo sua percepção, ao ser rotacionado, deixa de ser um quadrado. Isso reforça a necessidade de se trabalharem conceitos matemáticos com mais cuidado, de modo a evitar que determinados fatores perceptuais induzam ao erro.

Para futuros trabalhos, fica a sugestão de um estudo mais profundo acerca de pseudoconceitos, pois, ao se identificar certa preponderância da concretude na forma como são encarados os conceitos abordados, imagina-se que evoluir dos pseudoconceitos para os conceitos abstratos contribuirá para um melhor desenvolvimento dos esquemas de prova. Também é relevante que se faça uma pesquisa com séries mais avançadas, uma vez que o grau de escolaridade pode ter influenciado na maturidade dos conceitos abordados.

REFERÊNCIAS

AYALA, M. *Um estudo do processo de argumentação por alunos cegos*. Dissertação (mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2016. 108f.

DE VILLIERS, M. "Some Reflections on the Van Hiele Theory". In: *Congress of Teachers of Mathematics*, 4., 2010, Zagreb. *Anais*... Zagreb, Croatian Mathematical Society, 2010.

FERNANDES, S. *Uma análise vygotskiana da apropriação do conceito de simetria por aprendizes sem acuidade visual*. Dissertação (Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, 2004. 322f.

HAREL, G.; SOWDER L. "Students' Proof Schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, San Diego, v. 7, p. 234-283, 1998.

______. "Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof". In: LESTER JÚNIOR., F. K. (org.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. Charlotte: Information Age Pub, 2007, p. 805-842.

MONTEIRO, C.; COSTA, C. "Dificuldades na aprendizagem dos números racionais". *Revista Educação e Matemática*, Lisboa, n. 40, p. 60-63, 1996.

NUNES, S. S.; LOMÔNACO, J. F. B. "Desenvolvimento de conceitos em cegos congênitos: caminhos de aquisição do conhecimento". *Revista Semestral da Associação Brasileira de Psicologia Escolar e Educacional (ABRAPEE)*, São Paulo, v. 12, n. 1, p. 119-138, 2008.

VAN DER VEER, R.; VALSINER, J. *Understanding Vygotsky: a quest for synthesis*. Cambridge: Blackwell, 1991.

VYGOTSKI, L. S. *The collected works of L. S. Vygotsky: the fundamentals of defectology (Abnormal psychology and learning disabilities)*. Nova Iorque, 1993, v. 2.

______. *Pensamento e linguagem*. Tradução de Nélson Jahr Garcia. [S.l]: Ed. Ridendo Castigat Mores, 2001. E-Book. Disponível em: <http://bibliotecadigital.puc-campinas.edu.br/services/e-books/Lev%20Semenovich%20Vygotsky-1.pdf>. Acesso em: 19 jan. 2017.

WARREN, D. H. *Blindness and children: an individual differences approach*. Nova Iorque: Cambridge University Press, 1994.

Recebido em: 13.2.2017
Reformulado em: 9.4.2017
Aprovado em: 20.4.2017